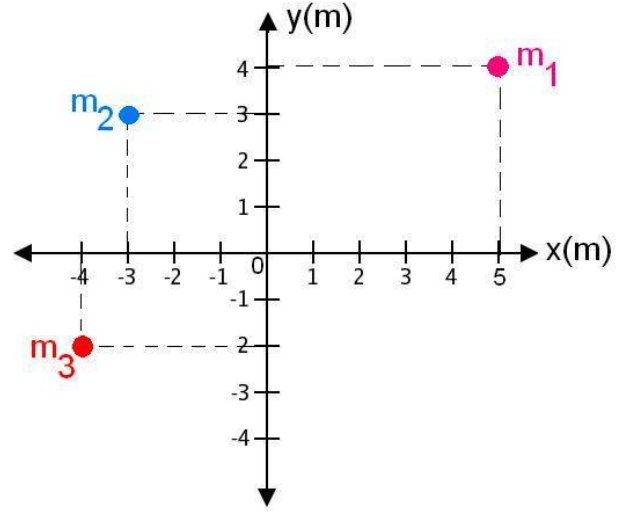
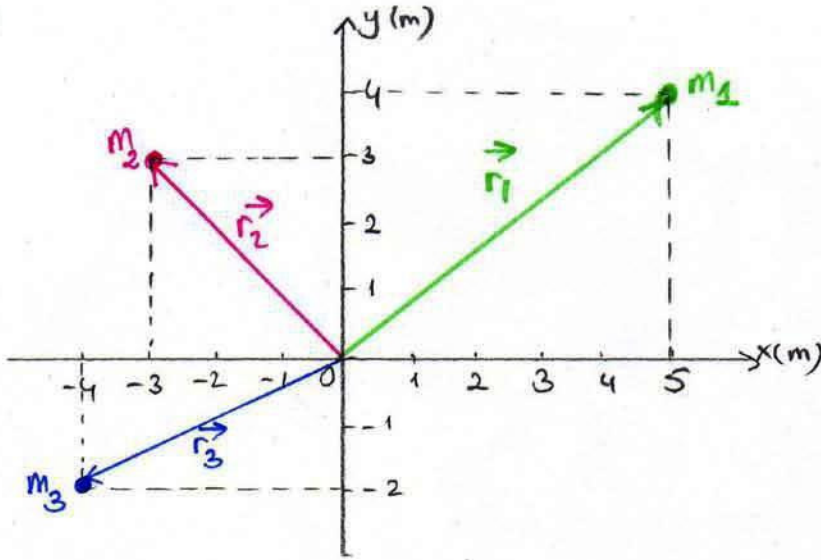


Kütle Merkezi

19. Şekil 16'da verilen noktasal kütleli cisimlerden oluşan sistemin kütle merkezinin konum vektörünü, birim vektörler cinsinden bulunuz. ($m_1=1$ kg; $m_2=2$ kg; $m_3=3$ kg)



Şekil 16



$$m_1 = 1 \text{ kg}$$

$$m_2 = 2 \text{ kg}$$

$$m_3 = 3 \text{ kg}$$

$$\vec{r}_1 = 5\hat{i} + 4\hat{j} \text{ (m)}$$

$$\vec{r}_2 = -3\hat{i} + 3\hat{j} \text{ (m)}$$

$$\vec{r}_3 = -4\hat{i} - 2\hat{j} \text{ (m)}$$

$$\vec{r}_{KM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

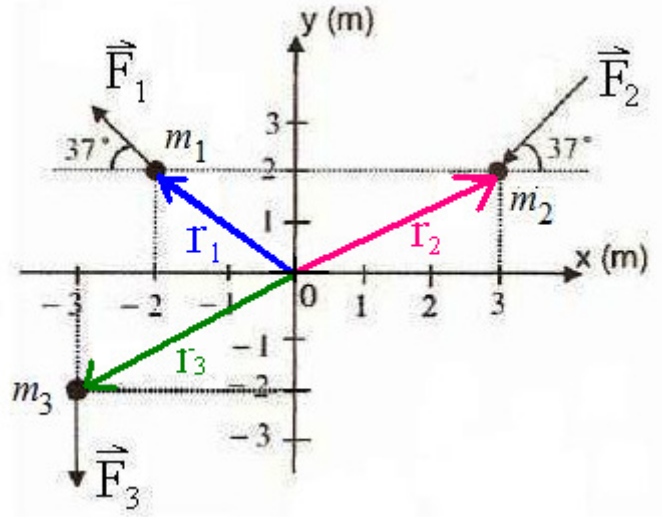
$$\vec{r}_{KM} = \frac{1 \cdot (5\hat{i} + 4\hat{j}) + 2 \cdot (-3\hat{i} + 3\hat{j}) + 3 \cdot (-4\hat{i} - 2\hat{j})}{1 + 2 + 3}$$

$$\vec{r}_{KM} = -\frac{13}{6}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} \text{ (m)}$$

20. Şekil 17'deki x-y düzleminde $m_1 = 4$ kg kütleli parçacığa 10N büyüklüğünde F_1 kuvveti, $m_2 = 8$ kg kütleli parçacığa 16N büyüklüğünde F_2 kuvveti ve $m_3 = 3$ kg kütleli parçacığa 20N büyüklüğünde F_3 kuvveti etki ediyor.

a) Sistemin kütle merkezinin konum ve ivme vektörlerini, birim vektörler cinsinden bulunuz.

b) Toplam çizgisel momentumun birim zamandaki değişimini bulunuz.



Şekil 17

$$\begin{aligned} \text{a) } m_1 &= 4 \text{ kg} & \vec{r}_1 &= -2\hat{i} + 2\hat{j} \text{ (m)} \\ m_2 &= 8 \text{ kg} & \vec{r}_2 &= 3\hat{i} + 2\hat{j} \text{ (m)} \\ m_3 &= 3 \text{ kg} & \vec{r}_3 &= -3\hat{i} - 2\hat{j} \text{ (m)} \end{aligned}$$

$$\vec{r}_{km} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$\vec{r}_{km} = \frac{4(-2\hat{i} + 2\hat{j}) + 8(3\hat{i} + 2\hat{j}) + 3(-3\hat{i} - 2\hat{j})}{4 + 8 + 3}$$

$$\vec{r}_{km} = \frac{7}{15}\hat{i} + \frac{18}{15}\hat{j} \text{ (m)}$$

$$\vec{F}_1 = 10(-\cos 37^\circ \hat{i} + \sin 37^\circ \hat{j}) = -8\hat{i} + 6\hat{j} \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_2 = 16(-\cos 37^\circ \hat{i} - \sin 37^\circ \hat{j}) = -12,8\hat{i} - 9,6\hat{j} \text{ (N)}$$

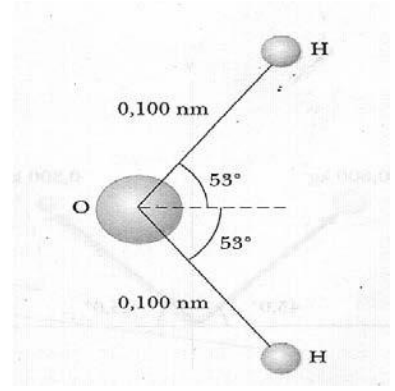
$$\vec{F}_3 = -20\hat{j} \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = -20,8\hat{i} - 23,6\hat{j} \text{ (N)}$$

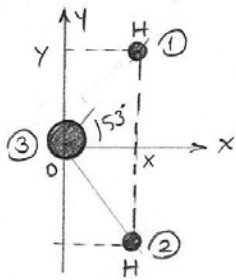
$$\vec{a}_{km} = \frac{\vec{F}_{net}}{m_1 + m_2 + m_3} = -\frac{20,8}{15}\hat{i} - \frac{23,6}{15}\hat{j} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

$$\text{b) } \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{net} = -20,8\hat{i} - 23,6\hat{j} \text{ (N)}$$

21. Bir su molekülü Şekil 18'deki gibi, bir oksijen ve iki hidrojen atomundan ibarettir. İki bağ arasındaki açı 106° dir. Bağ uzunlukları 0.1 nm ise molekülün kütle merkezinin yerini, birim vektörler cinsinden bulunuz.



Şekil 18



$$x = 0,1 \cdot \cos 53 = 0,06 \text{ nm}$$

$$y = 0,1 \cdot \sin 53 = 0,08 \text{ nm}$$

$$\vec{r}_1 = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = 0,06\vec{i} + 0,08\vec{j} \text{ nm}$$

$$\vec{r}_2 = 0,06\vec{i} - 0,08\vec{j}$$

$$\vec{r}_3 = 0$$

$$m^H = 1,008 \text{ atb}$$

$$m^O = 15,999 \text{ atb}$$

$$\vec{r}_{km} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1,008(0,06\vec{i} + 0,08\vec{j}) + 1,008(0,06\vec{i} - 0,08\vec{j})}{2(1,008) + 15,999}$$

$$= \frac{1,008 \cdot (0,12)}{18,015} = \underline{\underline{6,71 \cdot 10^{-3} \vec{i} \text{ (nm)}}}$$

22. x-y düzleminde bulunan iki parçacıklı bir sistemde; $m_1=2\text{kg}$, $\vec{r}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} (\text{m})$; $\vec{v}_1 = 3\hat{i} + 0.5\hat{j} (\text{m/s})$ ve $m_2=3 \text{ kg}$, $\vec{r}_2 = -4\hat{i} - 3\hat{j} (\text{m})$; $\vec{v}_2 = 3\hat{i} - 2\hat{j} (\text{m/s})$ ise bu sistemin,
- Kütle merkezinin yerini,
 - Kütle merkezinin hızını,
 - Sistemin toplam çizgisel momentumunu, birim vektörler cinsinden bulunuz.

$$m_1 = 2 \text{ kg} \quad \vec{r}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} (\text{m}) \quad \vec{v}_1 = 3\hat{i} + 0.5\hat{j} (\text{m/s})$$

$$m_2 = 3 \text{ kg} \quad \vec{r}_2 = -4\hat{i} - 3\hat{j} (\text{m}) \quad \vec{v}_2 = 3\hat{i} - 2\hat{j} (\text{m/s})$$

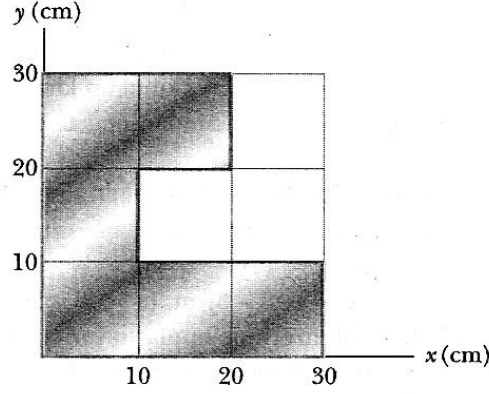
$$\text{a) } \vec{r}_{\text{KM}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot (\hat{i} + 2\hat{j}) + 3 \cdot (-4\hat{i} - 3\hat{j})}{2 + 3} = -2\hat{i} - \hat{j} (\text{m})$$

$$\text{b) } \vec{v}_{\text{KM}} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot (3\hat{i} + 0.5\hat{j}) + 3 \cdot (3\hat{i} - 2\hat{j})}{2 + 3} = 3\hat{i} - \hat{j} (\text{m/s})$$

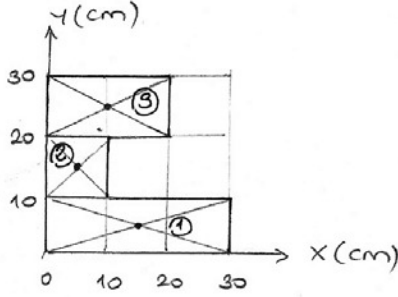
$$\text{c) } \Sigma \vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_{\text{KM}}$$

$$\Sigma \vec{p} = (2 + 3) \cdot [3\hat{i} - \hat{j}] = 15\hat{i} - 5\hat{j} (\text{kg}\cdot\text{m/s})$$

23. Düzgün bir çelik levha Şekil 19'daki gibi kesilmiştir. Bu levhanın kütle merkezinin yerini, birim vektörler cinsinden bulunuz.



Şekil 19



Gelik levhayı 3 parçaya bölelim, düzgün kütle dağılımına sahip simetrik cisimlerde kütle merkezi simetri eksenini geçmektedir (ya da cismin geometrik merkezidir.)

1. parçanın kütle merkezinin konum vektörü, $\vec{r}_1 = 15\vec{i} + 5\vec{j}$
2. " " " " " , $\vec{r}_2 = 5\vec{i} + 15\vec{j}$
3. " " " " " , $\vec{r}_3 = 10\vec{i} + 25\vec{j}$

Birim alan başına kütleye σ dersek, $(\sigma = \frac{M}{A})$

$$M_1 = \sigma \cdot A_1 = \sigma \cdot (0,3 \times 0,1) = 0,03\sigma \text{ kg}$$

$$M_2 = \sigma \cdot A_2 = \sigma \cdot (0,1 \times 0,1) = 0,01\sigma \text{ kg}$$

$$M_3 = \sigma \cdot A_3 = \sigma \cdot (0,2 \times 0,1) = 0,02\sigma \text{ kg}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_{km} &= \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\ &= \frac{\sigma [0,03(15\vec{i} + 5\vec{j}) + 0,01(5\vec{i} + 15\vec{j}) + 0,02(10\vec{i} + 25\vec{j})]}{\sigma(0,03 + 0,01 + 0,02)} \end{aligned}$$

$$\vec{r}_{km} = \left(\frac{0,7\vec{i} + 0,8\vec{j}}{0,06} \right) = (11,7\vec{i} + 13,3\vec{j}) \text{ m}$$